Przestrajalne okno wielomianowe trzeciego stopnia

Marek Jaskuła

Institute of Electronic, Telecommunication and Computer Science,
West Pomeranian University of Technology, Szczecin, Poland Marek.Jaskula@zut.edu.pl

Streszczenie W pracy zaprezentowana została metoda przestrajania okna wielomianowego poprzez zastosowanie podstawienia w dziedzinie częstotliwości pazująca na podstawieniu $\omega = \sqrt{\omega^2 - \Omega^2}$ [1].

1 Wprowadzenie

Dane jest okno wielomianowe [3], przy czym *st* oraz *stA* decydują o ilośći poszczególnych stopni wielomianu

$$w \ := \ (t, st, stA) \mapsto 1 + \sum_{k=st}^{stA} a_k \left(\frac{t}{T}\right)^k \tag{1}$$

w przypadku, gdy *st=2* oraz *stA=3* otrzymujemy okno wielomianowe trzeciego stopnia o postaci

$$w(t, 2, 3) = 1 + \frac{a_2 t^2}{T^2} + \frac{a_3 t^3}{T^3} \tag{2}$$

Obliczamy trasformatę Fouriera uwzględniając to, że funkcja jest parzysta

$$W(\omega) = 2 \int_0^T (w(t, 2, 3) \cos(t\omega) dt$$

i otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(\omega) = 2 \left(\frac{a_3 + a_2 + 1}{\omega} + \frac{-6\, a_3 - 2\, a_2}{T^2 \omega^3} \right) \sin(T\omega) + \\ + 2 \left(\frac{3\, a_3 + 2\, a_2}{T\omega^2} - 6\, \frac{a_3}{\omega^4 T^3} \right) \cos(T\omega) + 12\, \frac{a_3}{\omega^4 T^3} \end{aligned} \tag{3}$$

dokonujemy uporządkowania względem omega

$$\begin{aligned} W(\omega, om) = (\omega, om) \mapsto \frac{(2\, a_3 + 2\, a_2 + 2) \sin(T\omega)}{\omega} + \\ + \left(4\, \frac{a_2}{T} + 6\, \frac{a_3}{T}\right) \cos(T\omega)\, \omega^{-2} + \left(-4\, \frac{a_2}{T^2} - 12\, \frac{a_3}{T^2}\right) \sin(T\omega)\, \omega^{-3} + \\ + \left(12\, \frac{a_3}{T^3} - 12\, \frac{a_3 \cos(T\omega)}{T^3}\right) \omega^{-4} \end{aligned} \tag{4}$$

zgodnie z literaturą [1] dokonujemy podstawienia

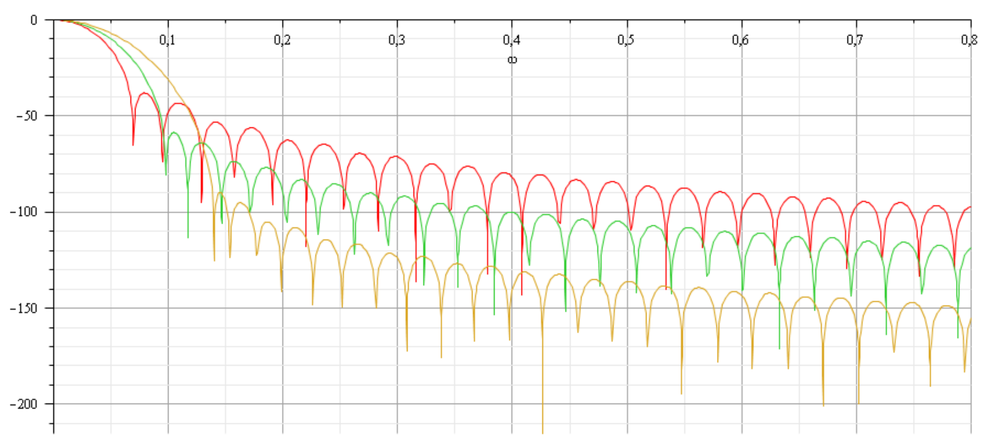
$$\omega = \sqrt{\omega^2 - \varOmega^2}$$

Otrzymujemy funkcję

$$\begin{aligned}
G(\omega,\varOmega) = {} & \left(2\,\frac{(a_3 + a_2 + 1)\,\omega^4}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^{5/2}} + \left(2\,\frac{-2\,a_2\varOmega^2 - 2\,\varOmega^2 - 2\,a_3\varOmega^2}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^{5/2}} + 2\,\frac{-6\,a_3 - 2\,a_2}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^{5/2} T^2} \right) \omega^2 + \right. \\
& \left. +\ 2\,\frac{a_3\varOmega^4 + a_2\varOmega^4 + \varOmega^4}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^{5/2}} + 2\,\frac{6\,a_3\varOmega^2 + 2\,a_2\varOmega^2}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^{5/2} T^2} \right) \sin\left(T\sqrt{\omega^2 - \varOmega^2} \right) + \\
& +\left(2\,\frac{\left(3\,a_3\sqrt{\omega^2 - \varOmega^2} + 2\,\sqrt{\omega^2 - \varOmega^2}a_2\right)\omega^2}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^{5/2} T} + 2\,\frac{-2\,\sqrt{\omega^2 - \varOmega^2}a_2\varOmega^2 - 3\,\sqrt{\omega^2 - \varOmega^2}a_3\varOmega^2}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^{5/2} T} + \right. \\
& \left. -\ 12\,\frac{a_3}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^2 T^3} \right) \cos\left(T\sqrt{\omega^2 - \varOmega^2} \right) + 12\,\frac{a_3}{\left(\omega^2 - \varOmega^2\right)^2 T^3}
\end{aligned} \tag{5}$$

której wartośc zależna jest od ω oraz $\varOmega$ przy założonych innych parametrach.

Niech $a_2 = -3$, $a_3 = 2$, $T = 100$



Rysunek 1. Przestrajane okno wielomianowe trzeciego stopnia dla trzech róznych parametrów$\varOmega$

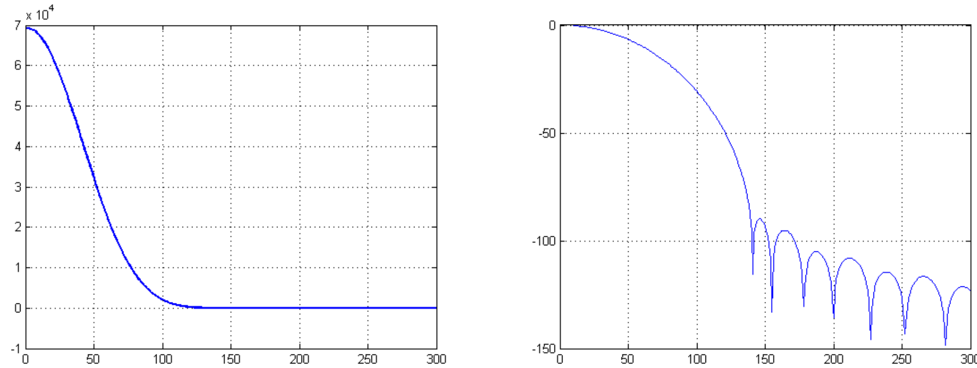
1.1 Realizacja w programie Matlab. Wersja cosinusowa

Wykorzystując wzór (3) możemy w prosty sposób zrealizować widmo okna z uwzględnieniem podstawienia.

```
T=100;
omega=0.00001:0.001:30/T;
a3=2; a2=-3; Omega=25/(2*T);
```

```
om=sqrt(omega.^2-Omega^2);
A=2*((a3+a2+1)./om+(-6*a3-2*a2)./(T^2*om.^3));
B=2*((3*a3+2*a2)./(T*om.^2)-6*a3./(om.^4*T^3));
C=12*a3./(om.^4*T^3);

X=A.*sin(om*T)+B.*cos(om*T)+C;
```



Rysunek 2. Postać częstotliwościowa przestrajanego okna wielomianowego, realizacja w Matlabie

2 Transformata Fouriera z częścią urojoną

Obliczamy

$$W(\omega) = 2\int_0^T w(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{6}$$

co dla założonej funkcji okna wielomianowego prowadzi do wzoru

$$\begin{aligned} W(\omega) = 2\left(\frac{i + ia_2 + ia_3}{\omega} + \frac{2\,a_2 + 3\,a_3}{\omega^2 T} + \frac{-6\,ia_3 - 2\,ia_2}{T^2\omega^3} - 6\,\frac{a_3}{T^3\omega^4}\right)e^{-iT\omega} + \\ -\frac{2\,i}{\omega} + \frac{4\,ia_2}{T^2\omega^3} + 12\,\frac{a_3}{T^3\omega^4} \end{aligned} \tag{7}$$

Poniżej przedstawiona jest funkcja okna zrealizowana w programie Matlab.

2.1 Realizacja w Matlabie

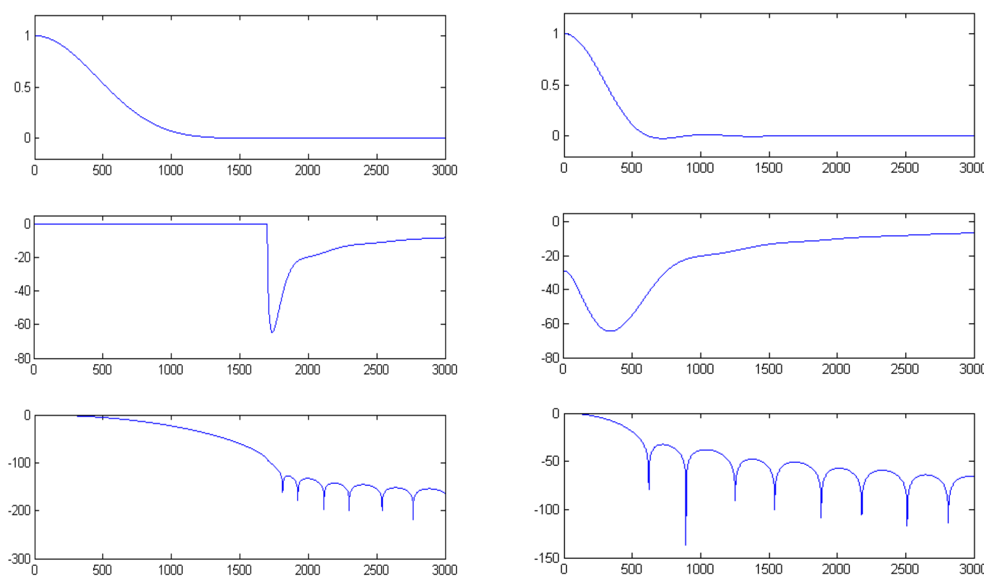
```
om=sqrt(omega.^2-Omega^2);

A=2*((i+i*a2+i*a3)./om+(2*a2+3*a3)./(T*om.^2)+
```

```
+ (-(6*i)*a3-(2*i)*a2)./(T^2*om.^3)-6*a3./(T^3*om.^4));
C=-(2*i)./om+(4*i)*a2./(T^2*om.^3)+12*a3./(T^3*om.^4);

W=A.*exp(-i*om*T)+C;
```

W tym przypadku wartość Ω może przyjmować wartość dodatnie (powiększenie szerokości lista głównego i obniżenie listków bocznych) lub też wartości urojone (zmniejszenie szerokości lista głównego i podwyższenie listków bocznych)



Rysunek 3. Postać częstotliwościowa (amplituda, faza, amplitudowa logarytmiczna) przestrajanego okna wielomianowego, realizacja w Matlabie dla Ω rzeczywistego – a), urojonego – b)

3 Podsumowanie

Przedstawione rozwiązanie możliwe jest to zaimplementowania w innych oknach czasowych. Takie podejście umożliwia przestrajanie okna w bardzo dużym zakresie dając duże możliwości np przy projektowaniu filtrów FIR metodą okien czasowych.

Literatura

1. Desbiens R., P. Tremblay: A new afficien approach to the design of paametric windows with arbitrary sidelobe profiles In: Signal processing, 86 (2006), pp. 3226-3239

2. Jaskuła, M.: The polynomial window and its abel transform. In: Proc of ICSES, Poznań (2004) 301–304
3. Jaskuła, M.: Fast time window in dsp. PhD thesis, Szczecin University of Technology, Szczecin, Poland (June 1999)
4. Knab, J. J.: Interpolation of Band-Limited Functions Using the Approximate Prolate Series. IEEE Trans. Info Theory **IT-25**(6) (November 1979) 717–720
5. Slepian, D.: Some Asymptotic Expanstions for Prolate Spheroidal Wave Functions. J. Math. and Phys. **44**(2) (June 1965) 99–140
6. Kaiser, J. F.: Design Methods for Sampled Data Filters. In: Proc. First Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory. (November 1963) 221–236
7. Kaiser, J. F.: Nonrecursive Digital Filter Design Using the I_0-Sinh Window Function. In: Proc. 1974 IEEE Symp. Circuits and Systems. (1974) 20–23
8. Blackman, R. B. and Tukey, J. W.: The Measurement of Power Spectra. Dover Publications Inc., New York (1958)